

↓] дано лнн. разност. ур-ние k -го [18/02
пор-ка с прав. частью f_n , с пост. коэфф
] q - корень хар. ур-ния крат-ти s . If
 $f_n = P_m(n)q^n$, то ф-ция $y_n = n^s Q_m(n)q^n$ -
частное реш-е этого ур-я ($P_m(n)$, $Q_m(n)$ -
полиномы степени m)

▲ Без док-ва ■ // Книга (3)

ЛН С-ма систем ур-ний

] $\vec{y}'(n) = (y^{(1)}(n), y^{(2)}(n), \dots, y^{(m)}(n));$

$A = A(n)$ — м-ца размер-ти $n \times n$;

$\vec{y}(n) = A \vec{y}(n-1)$ — с-ма разност ур-ний
1-го пор-ка.

Будем искать $\vec{y}(n)$ в виде: $\vec{\xi} \cdot q^n$; $\vec{y}(n) =$
 $= (\vec{\xi} q^n)$

$$\vec{\xi} q^n = A(\vec{\xi} q^{n-1}) = q^{n-1} A \vec{\xi} \Rightarrow A \vec{\xi} = q \vec{\xi}$$

If $\vec{\xi}$ — собств. в-р м-цы A , q — соотв.
с.зн., то $\vec{y}(n) = \vec{\xi} q^n$ — есть реш-е системы
ур-ний

$\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_m$ — разные с в-ры м-цы A ,
соотв. различным с.зн. $q_1, \dots, q_m$, $q_i \neq q_j$.
Тогда $\vec{y} = \sum_{i=1}^m \xi_i q_i^n \underbrace{C_i}_{\text{коэфф-т}}$ — общ. реш-е с-м $\vec{y}(n) =$
 $= A \vec{y}(n-1)$

П.5 Разност. задача на с.зн.

$$\Phi(n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}) = 0$$

$$? y_n = \varphi(n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}) ?$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Нужно знать $y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$
& задачу на с.зн.:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \lambda y_n, \quad n = 1, N-1$$

$$y_0 = 0, y_N = 0$$

$$y_{n+1} - (2 + D)y_n + y_{n-1} = 0$$

Дар yp-миле индем биг: $q^2 - (2 + D)q + 1 = 0$,

$$q^2 - 2 \left(1 + \frac{D}{2}\right)q + 1 = 0$$

$$q_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$$y_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$$

Кр. ушн-а: $n=0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$

$n=N \Rightarrow C_1 q_1^N + C_2 q_2^N = 0 \Leftrightarrow q_1^N = q_2^N$

$$|a| = 1 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \emptyset$$

$|D| < 0 \Rightarrow y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = -Dy_n, D > 0,$

$$n = 1, N-1,$$

$$y_0 = y_N = 0$$

$$y_{n+1} - 2 \left(1 - \frac{D}{2}\right)y_n + y_{n-1} = 0$$

Дар. yp-миле: $q^2 - 2 \left(1 - \frac{D}{2}\right)q + 1 = 0$

$$q_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}, |a| \leq 1, \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \in \mathbb{R}, \underbrace{\left|1 - \frac{D}{2}\right|}_{a = \cos \alpha} \leq 1$$

$$q = \cos \alpha \pm i \sin \alpha, y_n = C_1 \cos \alpha n + C_2 \sin \alpha n$$

Ищем α : (из краевых условий)

$$y_0 = 0 = C_1 \cos \alpha 0 + C_2 \sin \alpha 0 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$y_N = \underbrace{C_1 \cos \alpha N}_{=0} + C_2 \sin \alpha N = 0$$

$$\sin \alpha N = 0 \Rightarrow \alpha N = \pi m \Rightarrow \left[\alpha_m = \frac{\pi m}{N} \right], \forall m \in \mathbb{N}$$

Ур-ние представляет собой СЛРЖ:

с-ца $\mathcal{A}$: 1) с-ца $\Rightarrow (N-1)$ с. в-ра, разлнх, лнн. незавс.

2) $\Rightarrow (N-1)$ с. зн.

а) с. ф-ции: $y_n = C \sin \alpha_m n = C \sin \frac{\pi m n}{N}$, $m = \overline{1, N-1}$
 лнн. незав. ортог.

б) с. зна-а: $1 - \frac{D_m}{2} = C \cos \alpha_m$,
 $D_m = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi m}{N} \right) = 4 \sin^2 \frac{\pi m}{2N}$,

$$m = \overline{1, N-1}$$

Построим с-цу соотв. ортонорм. ф-ций, т.е. выберем такие C : $\|y(n)\|^2 = 1$

$$(u_n, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \quad (u_0 = u_N = v_0 = v_N = 0)$$

$$(y_n^{(m)}, y_n^{(m)}) = C^2 \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi m k}{N} = 1 \quad (\text{так нужно})$$

$\|y(n)\|^2$ найдем C .

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi m k}{N} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi m k}{N} \right) = \frac{1}{2} (N-1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2\pi m k}{N} = \frac{N-1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{N-1} e^{i \frac{2\pi m k}{N}} = \frac{N-1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{N-1} (e^{i \frac{2\pi m}{N}})^k = \frac{N-1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i \frac{2\pi m}{N} (N-1)} - 1}{e^{i \frac{2\pi m}{N}} - 1} e^{i \frac{2\pi m}{N}} \right] =$$

$$= \frac{N-1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i \frac{2\pi m N}{N}} \cdot e^{-i \frac{2\pi m}{N}} - 1 \cdot e^{i \frac{2\pi m}{N}}}{e^{i \frac{2\pi m}{N}} - 1} \right] = \frac{N-1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{N}} - 1}{e^{i \frac{2\pi m}{N}} - 1} e^{i \frac{2\pi m}{N}} = \frac{N-1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i \frac{2\pi m}{N}}}{e^{i \frac{2\pi m}{N}} - 1} =$$

$$= \frac{N-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N}{2}$$

$$\|y^{(m)}\|^2 = C^2 \frac{N}{2} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{N}}$$

Ортонорм. с-ма с. ф-ций: $y^{(m)}(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{2\pi mn}{N}$,
 $m = \overline{1, N-1}$

$\{y(n)\}$, $n = \overline{0, N-1}$,

$$y(0) = y(N) = 0$$

$$y_n = \sum_{m=1}^{N-1} C_m \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{2\pi mn}{N}$$

Глава 2. Ортогональные многочлены
 Опр с-ма полиномов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ наз-ся ортог-й на интервале $(-1, 1)$, if $\int_{-1}^1 g(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0$, $n \neq m$,

где $\rho(x)$ — весовая ф-ция, $\rho(x) \geq 0$,
 $\rho(x) \not\equiv 0$, $\rho(x)$ — интер.

Доказ. $(P_m(x), P_n(x)) = 0$

Об-ва:

① $\forall$ полином $Q_n(x)$ (степени n), м.о.
 ! представлен в виде: $Q_n(x) = \alpha_0 \cdot P_0(x) + \dots +$
 $+ \alpha_n P_n(x)$, где $P_i(x)$ — с-ма ортогон. поли-
 номов, $i = \overline{0, n}$

▲ $\exists Q_n(x) = C_0 + C_1 \cdot x + \dots + C_n x^n$, а

$P_i(x) = C_0^{(i)} + C_1^{(i)} x + \dots + C_i^{(i)} x^i$, $i = \overline{0, n}$

$(P_0(x) = C_0^{(0)})$

$P_1(x) = C_0^{(1)} + C_1^{(1)} x$ | $C_i^{(i)} \neq 0$

Р/тому, чтобы $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x)$

$C_0 = \alpha_0 C_0^{(0)} + \alpha_1 C_0^{(1)} + \dots + \alpha_n C_0^{(n)}$

$C_1 = \alpha_1 C_1^{(1)} + \dots + \alpha_n C_1^{(n)}$

$\Rightarrow$ Ищем α

$C_n = \alpha_n C_n^{(n)}$

На диагоналях стоят $C_i^{(i)} \neq 0 \Rightarrow$ реш-я $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$
 $\exists$ и!, т.к. матриц. диагональн. с эн. $\alpha_n C_n^{(n)}$, ...

След. $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x) \mid P_k(x)$;

$$(Q_n(x), P_k(x)) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (P_i(x), P_k(x)) = \alpha_k (P_k(x), P_k(x))$$

↑
в единичности

$$\alpha_k = \frac{(Q_n(x), P_k(x))}{(P_k(x), P_k(x))}, \quad k = \overline{0, n}$$

$\|P_k\|^2$

Сл. $\exists Q_m(x)$ — полином степени $m < n$, тогда $(Q_m(x), P_n(x)) = 0$

② Д/ каждой вес. ф-ции $g(x) \exists$! с-ма ортон. полиномов с полнотой коэфф. при старшей степени

▲ $\nexists$ полином $P_n(x) = a_n x^n + Q_{n-1}(x) =$ $\text{св. чл. (1)} = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$

$$P_n(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x) \quad | \quad P_j(x)$$

$$(P_n(x), P_j(x)) = a_n (x^n, P_j(x)) + \alpha_j (P_j(x), P_j(x))$$

$= 0 \quad (P_n \perp P_j)$

$$\alpha_j = \frac{-a_n (x^n, P_j(x))}{(P_j(x), P_j(x))}$$

≥ 0

$\exists$ с-ма $\{P_j(x)\}$ — ортонормир. $\Rightarrow$

$$\alpha_j = -a_n (x^n, P_j(x))$$

Тогда $P_n(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-a_n (x^n, P_k(x))) P_k(x)$

$$= a_n \left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, P_k(x)) P_k(x) \right] \quad // \text{возведем в квадрат}$$

$$\underbrace{(P_n(x), P_n(x))}_{=1 > 0} = a_n^2 \underbrace{\left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, P_k(x)) P_k(x) \right]^2}_{\geq 0}$$

$$a_n^2 = b \geq 0 \Rightarrow a_n = \pm \sqrt{b} \Rightarrow \text{св-во доказано}$$

Сл. Ортон. полиномы отличаются только на коэффициент